Revista de Economia Política, vol. 10, n.º 3 (39), julho-setembro/1990

Uma Extensão do Teorema de Perron-Frobenius

ROBERT NICOL*

É bem sabido que para um sistema de produção simples, uma série de resultados interessantes pode ser obtida para o esquema de Sraffa, tais como: uma taxa de retorno positiva, preços positivos e uma relação inversa entre taxa de retorno e taxa salarial (*vide* Schefold pp. 141-2). No entanto, ao tentarmos aplicar o esquema para produção conjunta, tais resultados nem sempre podem ser observados.

O presente trabalho tem por objetivo estender os resultados de produção simples para o caso de produção conjunta, através de uma extensão do conhecido teorema de Perron-Frobenius para matrizes positivas (semi-positivas).

A estrutura do trabalho é bastante simples: partindo de um resultado de Schefold para produção conjunta, tenta-se ampliar o resultado original para aumentar sua abrangência. Schefold em um de seus trabalhos (Schefold pp. 144-5), ao analisar o problema da produção conjunta observou que se tivéssemos uma matriz A de insumos e uma matriz B de produtos, correspondente a n setores "produtivos", "essenciais" e "separadamente produzíveis" (os conceitos de "essencialidade" e de "possibilidade de produção isolada" são de autoria de Schefold), então para esse esque-

* Da Escola de Administração de Empresas de São Paulo da Fundação Getúlio Vargas.

ma os resultados mais importantes de Sraffa seriam válidos. Em termos mais concretos, valendo-se dos conceitos de "essencialidade" e de "possibilidade de produção isolada", Schefold demonstra que a matriz $(B - A)^{-1}$ de um tal sistema seria positiva. Sendo positiva, os resultados desejados seguiriam facilmente, como podemos ver a seguir.

Teorema (de Schefold):

Para um sistema produtivo tal que $(B - A)^{-1} > 0$ existe uma taxa retorno positiva e para tal taxa existe um sistema de preços positivo. Além do mais, existe o sistema básico e, conseqüentemente, uma relação inversa entre a taxa de retorno e a taxa salarial.

Demonstração:

Seja $(B - A)^{-1} > 0$, então, forçosamente $(B - A)^{-1}A > 0$

portanto, consideremos $M = (B - A)^{-1}A$ onde $M > 0$

e a solução do sistema $\rho Ip = Mp$.

Sabemos pelo Teorema de Perron-Frobenius que para $M > 0$ temos uma solução tal que:

$$\rho > 0$$
e
$$p > 0.$$

Portanto $\rho Ip = (B - A)^{-1}Ap$ tem solução com

$$\rho > 0$$
e
$$p > 0$$

ou seja $\rho(B - A)p = Ap$ ou

$$Bp = \left(\frac{1 + \rho}{\rho}\right) Ap$$

tem solução do tipo desejado. Façamos $R = (1 + \rho)/\rho$. É claro que se $\rho > 0$, R será maior que 1 e, conseqüentemente, existirá uma solução para o sistema tal que:

$$p > 0$$
e
$$R > 1.$$

É também fácil ver que para o mesmo $\rho > 0$, existe um vetor $q > 0$ tal que $qB = RqA$ o que quer dizer que existe o sistema básico e, conseqüentemente, uma relação (linear) inversa entre a taxa salarial e a taxa de lucro.

Extensão do Resultado

Chamemos $D = (B - A)$ tal que $D^{-1} > 0$ e de $D > 0$ de uma matriz de Schefold, então:

Teorema:

Seja uma matriz produtiva tal que

$$D = \begin{bmatrix} + & - & \dots & - \\ - & + & \dots & - \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ - & - & \dots & + \end{bmatrix}$$

isto é, uma matriz para a qual todos os elementos da diagonal principal são positivos, enquanto que os elementos restantes são negativos. D é uma matriz de Schefold, isto é, $D^{-1} > 0$ e $\det D > 0$.

Demonstração:

Demonstraremos o resultado por indução para uma matriz D_4 (4x4). A generalização para o caso *nxn* é imediata.,

O caso de uma matriz 1x1 é óbvio.

Efetivamente seja $D_1 = [(b_{11} - a_{11})]$ tal que o sistema seja produtivo. É óbvio que $\det D_1 > 0$ e que $D_1^{-1} > 0$.

Para o caso de uma matriz 2x2 teríamos:

$$D_2 = \begin{bmatrix} (b_{11} - a_{11}) & (b_{12} - a_{12}) \\ (b_{21} - a_{21}) & (b_{22} - a_{22}) \end{bmatrix}$$

tal que $(b_{11} - a_{11})$ e $(b_{22} - a_{22})$ são positivos e $(b_{12} - a_{12})$ e $(b_{21} - a_{21})$ são negativos, e

$$(b_{11} - a_{11}) + (b_{21} - a_{21})$$
$$(b_{22} - a_{22}) + (b_{12} - a_{12})$$

são positivos, já que o sistema é produtivo. A partir dessas condições, é fácil verificar que $|D_2| = (b_{11} - a_{11})(b_{22} - a_{22}) - (b_{21} - a_{21})(b_{12} - a_{12})$ é maior que zero, e que

$$D_2^{-1} = \frac{1}{|D_2|} \begin{bmatrix} (b_{22} - a_{22}) & -(b_{22} - a_{12}) \\ -(b_{21} - a_{21}) & (b_{11} - a_{11}) \end{bmatrix} > 0$$

Para demonstrar a validade da proposição para o caso de uma matriz 4x4, admitamos que o teorema seja válido para o caso de uma matriz 3x3, e tentemos inicialmente mostrar que $|D_4| > 0$.

Como

$$D_4 = \begin{bmatrix} (b_{11} - a_{11}) & (b_{12} - a_{12}) & \ldots & (b_{14} - a_{14}) \\ (b_{21} - a_{21}) & & & \\ (b_{31} - a_{31}) & & \text{etc.} & \\ (b_{41} - a_{41}) & & & \end{bmatrix}$$

onde

$$\begin{aligned} (b_{11} - a_{11}) &> 0 \\ (b_{21} - a_{21}) &< 0 \\ (b_{31} - a_{31}) &< 0 \\ (b_{41} - a_{41}) &< 0 \end{aligned}$$

e $(b_{11} - a_{11}) + (b_{21} - a_{21}) + (b_{31} - a_{31}) + (b_{41} - a_{41}) > 0$ já que o sistema é produtivo, é claro que

$$(b_{11} - a_{11}) > \begin{array}{l} -(b_{21} - a_{21}) \\ -(b_{31} - a_{31}) \\ -(b_{41} - a_{41}) \end{array}$$

isto é, o termo da diagonal principal é maior, em termos absolutos, que os outros termos da mesma coluna. Conseqüentemente vamos adicionar uma parcela da primeira linha à segunda linha, uma parcela da primeira linha à terceira linha e, finalmente, uma parcela da primeira linha à quarta linha, tal que

$$\begin{aligned} &1 > \theta, \epsilon, \sigma > 0 \\ &\theta + \epsilon + \sigma < 1 \end{aligned}$$

de forma a obtermos uma matriz do tipo

$$\begin{bmatrix} (b_{11} - a_{11}) & (b_{12} - a_{12}) & (b_{13} - a_{13}) & (b_{14} - a_{14}) \\ 0 & (b_{22} - a_{122}) + \theta(b_{12} - a_{12}) & \ldots & \\ 0 & (b_{22} - a_{122}) + \epsilon(b_{12} - a_{12}) & & \\ 0 & (b_{22} - a_{122}) + \sigma(b_{12} - a_{12}) & & \text{etc.} \end{bmatrix}.$$

cujo determinante terá forçosamente o mesmo valor (e sinal) que $|D_4|$.

Pode-se verificar que a submatriz 3x3, contida no canto de baixo (lado direito), da matriz transformada, isto é

$$F = \begin{bmatrix} (b_{22} - a_{22}) + \theta(b_{12} - a_{12}) & (b_{23} - a_{23}) + \theta(b_{13} - a_{13}) & (b_{24} - a_{24}) + \theta(b_{14} - a_{14}) \\ (b_{32} - a_{32}) + \epsilon(b_{12} - a_{12}) & (b_{33} - a_{33}) + \epsilon(b_{13} - a_{13}) & (b_{34} - a_{34}) + \epsilon(b_{14} - a_{14}) \\ (b_{42} - a_{42}) + \sigma(b_{12} - a_{12}) & (b_{43} - a_{43}) + \sigma(b_{13} - a_{13}) & (b_{44} - a_{44}) + \sigma(b_{14} - a_{14}) \end{bmatrix}$$

é uma matriz produtiva visto que as colunas têm soma positiva, ex.:

$$(b_{22} - a_{22}) + \theta(b_{12} - a_{12}) + (b_{32} - a_{32}) + \epsilon(b_{12} - a_{12}) + (b_{42} - a_{42}) + \sigma(b_{12} - a_{12}) > 0$$

com resultados semelhantes para as outras colunas, com a característica adicional de F ser do tipo

$$F = \begin{bmatrix} + & - & - \\ - & + & - \\ - & - & + \end{bmatrix}$$

o que quer dizer que F^{-1} tem todos seus elementos > 0, e que $|F| > 0$ mas como $|D_4| = (b_{11} - a_{11})\,|F|$ então $|D_4| > 0$. Para demonstrar o valor positivo dos termos de D_4^{-1}, só temos que observar o sinal dos termos da matriz das menores de D_4, isto é, o sinal dos termos de

$$\begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \beta_{14} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & \beta_{24} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} & \beta_{34} \\ \beta_{41} & \beta_{42} & \beta_{43} & \beta_{44} \end{bmatrix}$$

onde

$$\beta_{11} = \det \begin{bmatrix} (b_{22} - a_{22}) & (b_{23} - a_{23}) & (b_{24} - a_{24}) \\ (b_{32} - a_{32}) & (b_{33} - a_{33}) & (b_{34} - a_{34}) \\ (b_{42} - a_{42}) & (b_{43} - a_{43}) & (b_{44} - a_{44}) \end{bmatrix}$$

com definições semelhantes para os outros β

É evidente que $\beta_{11} > 0$, já que os termos da matriz que lhe dá origem são os termos de uma matriz 3x3 produtiva do tipo

$$\begin{bmatrix} + & - & - \\ - & + & - \\ - & - & + \end{bmatrix}$$

e, conseqüentemente, seu determinante é positivo.

Com relação a

$$\beta_{12} = \det \begin{bmatrix} (b_{21} - a_{21}) & (b_{23} - a_{23}) & (b_{24} - a_{24}) \\ (b_{31} - a_{31}) & (b_{33} - a_{33}) & (b_{34} - a_{34}) \\ (b_{41} - a_{41}) & (b_{43} - a_{43}) & (b_{44} - a_{44}) \end{bmatrix}$$

pode-se verificar que pela adição de parcelas positivas da última linha às outras duas linhas vamos obter um determinante de igual valor com a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} (b_{21} - a_{21}) + \theta(b_{41} - a_{41}) & (b_{23} - a_{23}) + \theta(b_{43} - a_{43}) & 0 \\ (b_{31} - a_{31}) + \epsilon(b_{41} - a_{41}) & (b_{33} - a_{33}) + \epsilon(b_{43} - a_{43}) & 0 \\ (b_{41} - a_{41}) & (b_{43} - a_{43}) & (b_{44} - a_{44}) \end{bmatrix}$$

onde $0 < \theta, \epsilon < 1$ e $0 < \theta + \epsilon < 1$ e que é o determinante de uma matriz de termos com sinais

$$\begin{bmatrix} - & - & 0 \\ - & + & 0 \\ - & - & + \end{bmatrix}$$

que, claramente, tem determinante com sinal negativo, isto é, $\beta_{12} < 0$.
De forma semelhante, pode-se mostrar que

$$\beta_{13} > 0 \; \beta_{14} < 0 \; \beta_{21} < 0 \; \beta_{22} > 0 \text{ etc.}$$

Teorema:

Para as matrizes de Schefold, aplica-se o teorema de Schefold.

Demonstração: é óbvia.

Consideremos, agora, um sistema produtivo de 4 setores, para o qual a matriz $(B - A)$ tem seus elementos da diagonal principal tal que

$$\frac{b_{ii}}{a_{ii}} > 1 \text{ e onde } T = \min \left\{ \frac{b_{ii}}{a_{ii}} \right\}$$

e os outros elementos $0 \leq \dfrac{b_{ij}}{a_{ij}} < T$ para $i \neq j$ com pelo menos um elemento > 1.

Observação:

Se todos os elementos $0 \leq \dfrac{b_{ij}}{a_{ij}} < T$ para $i \neq j$ fossem menores do que 1, estaríamos considerando uma matriz de Schefold, para a qual já vimos que existe uma solução.

Admitamos que $\max \left\{ \dfrac{b_{ij}}{a_{ij}} \right\} = V$ para $i \neq j$. Conseqüentemente $1 < V < T$.

Peguemos um valor $(1 + s)$ um "pouco" superior a V mas tal que

$V < (1 + s) < T$ e $(1 + s) = V + \mu$ onde $\mu > 0$ mas μ tendendo a zero.

Consideremos a matriz $[B - (1 + s) A]$. Claramente

$$[B - (1+s)A] = \begin{bmatrix} \left(\dfrac{b_{11}}{a_{11}} - (1+s)\right) a_{11} & \left(\dfrac{b_{12}}{a_{12}} - (1+s)\right) a_{12} & \left(\dfrac{b_{13}}{a_{13}} - (1+s)\right) a_{13} & \left(\dfrac{b_{14}}{a_{14}} - (1+s)\right) a_{14} \\ \left(\dfrac{b_{21}}{a_{21}} - (1+s)\right) a_{21} & & & \\ & & & \text{etc.} \end{bmatrix}$$

nesta matriz, por construção, todos os elementos da diagonal principal são positivos, enquanto que todos os outros elementos são negativos. Admitamos que esta matriz seja produtiva. Então $[B - (1 + s) A]$ é uma matriz de Schefold, conseqüentemente aplica-se o teorema de Schefold. Portanto existe uma solução para o sistema

$$Bp = \rho (1 + s) Ap$$

tal que $\rho > 1$ e $p > 0$, existindo também a mercadoria-padrão para tal sistema. É fácil perceber que a solução do sistema anterior, corresponde a encontrar um sistema de preços positivos, tal que as taxas de retorno dos 4 setores sejam positivas e iguais, isto é, corresponde a encontrar $p > 0$ tal que:

$$\frac{\sum_{1}^{4} [b_{1i} - (1 + s) a_{1i}] p_i}{\sum_{1}^{4} (1 + s) a_{1i} p_i} = \rho_1$$

$$\frac{\sum_{1}^{4} [b_{2i} - (1 + s) a_{2i}] p_i}{\sum_{1}^{4} (1 + s) a_{2i} p_i} = \rho_2$$

$$\frac{\sum_{1}^{4} [b_{3i} - (1 + s) a_{3i}] p_i}{\sum_{1}^{4} (1 + s) a_{3i} p_i} = \rho_3$$

$$\frac{\sum_{1}^{4} [b_{4i} - (1 + s) a_{4i}] p_i}{\sum_{1}^{4} (1 + s) a_{4i} p_i} = \rho_4$$

e $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = \rho > 0$

Claramente, de qualquer um dos setores pode-se obter

$$\frac{\sum_{1}^{4} [b_{1i} - (1 + s) a_{1i}] p_i}{\sum_{1}^{4} a_{1i} p_i (1 + s)} = \rho \Rightarrow \frac{\sum_{1}^{4} (b_{1i} - a_{1i}) p_i}{\sum_{1}^{4} a_{1i} p_i} = \rho + s + \rho s$$

o que demonstra que para o problema $Bp = \lambda Ap$ existe uma solução tal que $p > 0$ e $\lambda = 1 + \rho + s + \rho s > 0$. *Observação:* já que os preços são determinados de forma relativa, podemos fazer com que sua soma totalize 1, isto é, $\sum_i p_i = 1$. Também podemos ver que

$$\rho = \frac{(b_{i1} - a_{i1})\, p_1 + (b_{i2} - a_{i2})\, p_2 + (b_{i3} - a_{i3})\, p_3 + (b_{i4} - a_{i4})\, p_4}{a_{i1}\, p_1 + a_{i2}\, p_2 + a_{i3}\, p_3 + a_{i4}\, p_4} =$$

$$\frac{\left(\frac{b_{i1}}{a_{i1}} - 1\right) a_{i1}\, p_1 + \left(\frac{b_{i2}}{a_{i2}} - 1\right) a_{i2}\, p_2 + \dots}{a_{i1}\, p_1 + a_{i2}\, p_2 + \dots} =$$

$$\left(\frac{b_{i1}}{a_{i1}} - 1\right) \theta_1 + \left(\frac{b_{i2}}{a_{i2}} - 1\right) \theta_2 + \dots$$

com $\theta_j = \dfrac{a_{ij}\, p_j}{\sum_j a_{ij}\, p_j}$

onde $1 > \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, > 0$ e $\sum_i \theta_i = 1$, isto é, a taxa de retorno é uma média ponderada das taxas (físicas) de retorno dos diversos produtos produzidos por cada um dos setores. Conseqüentemente, podemos afirmar que:

$$\min \left\{\frac{b_{ii}}{a_{ii}} - 1\right\} \geq \rho + s + \rho s \qquad \geq \max \left\{\begin{matrix}\dfrac{b_{ij}}{a_{ij}} - 1 \\ i \neq j\end{matrix}\right\}$$

É fácil ver, também, que o $p > 0$ encontrado para o sistema

$Bp = (1 + \rho + s + \rho s)\, Ap$ é o mesmo $p > 0$ que satisfaz o problema original $Bp = (1 + \rho)\, Ap$.

Igualmente, pode-se ver que para $[B - (1 + s)\, A]$ ser produtivo, a soma de qualquer uma das colunas deve ser maior que zero, isto é,

$$(b_{1i} - (1 + s)\, a_{1i}) + (b_{2i} - (1 + s)\, a_{2i}) +$$
$$(b_{3i} - (1 + s)\, a_{3i}) + (b_{4i} - (1 + s)\, a_{4i}) > 0$$

ou seja

$$\sum_j (b_{ji} - (1 + s)\, a_{ji}) > 0 \Rightarrow \frac{\sum_j b_{ji}}{\sum_j a_{ji}} > (1 + s) \text{ para todos } i = 1 \dots 4$$

Portanto, condições suficientes para a existência da solução procurada são que:

A) $\dfrac{b_{ii}}{a_{ii}} > 1$ sendo $\min \left\{\dfrac{b_{ii}}{a_{ii}}\right\} = T$

B) $0 < \frac{b_{ij}}{a_{ji}} < T$ para $i \neq j$ com, pelo menos, um desses elementos

> 1, e com max $\left\{\frac{b_{i \neq j}}{a_{i \neq j}}\right\} = V$

C) $\frac{\sum_i b_{ij}}{\sum_i a_{ij}} > V$ para todos $j = 1 \ldots 4$ (já que podemos selecionar

$(1 + s)$ tão "próximo" de V quanto quisermos). Observação: esta condição corresponde à condição de produtividade do sistema.

E, se lembrarmos que o teorema de Schefold diz existir uma solução para qualquer sistema (A, B) positivo, produtivo, tal que:

A) $\frac{b_{ii}}{a_{ii}} > 1$

B) $0 < \frac{b_{i \neq j}}{a_{i \neq j}} < 1$ e,

C) $\frac{\sum_i a_{ij}}{\sum_i a_{il}} > 1$ para $j = 1 \ldots 4$ (condição de produtividade do sistema)

podemos sintetizar os resultados em um só teorema.

Teorema:

Para o sistema $Bp = \lambda Ap$ onde $A, B > 0$ e

A) $\frac{b_{ii}}{a_{ii}} > 1$ sendo que min $\left\{\frac{b_{ii}}{a_{ii}}\right\} = T$

B) $0 < \frac{b_{i \neq j}}{a_{i \neq j}} < T$ sendo max $\left\{\frac{b_{i \neq j}}{a_{i \neq j}}\right\} = V$ e

C) $\frac{\sum_i b_{ij}}{\sum_i a_{ij}} > V$ isto corresponde à condição de produtividade (alterada) do sistema;

existe uma solução para a qual $p > 0$ $\Sigma p_i = 1$ e $\lambda > 1$, sendo que existe a mercadoria-padrão, e, ainda, $V \leq \lambda \leq T$.

O Teorema anterior pode ser "extendido" um pouco mais, se observarmos que para que exista uma solução como a desejada, não é necessário que a matriz transformada [B − (1 + s) A] seja produtiva. Basta que exista uma matriz diagonal Λ, com elementos positivos na diagonal principal tal que

Λ (B − (1 + s) A) seja produtiva para que a solução desejada exista. Por quê? É imediato:

$$\text{se } \frac{\sum_i \lambda_i b_{ij}}{\sum_i \lambda_i a_{ij}} > V \text{ onde } \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ldots \end{bmatrix}$$

então existe a solução desejada para o sistema Λ (B − (1 + s) A). Mas a solução desse sistema é a mesma, em termos de preços e de taxa de retorno que a do sistema [B − (1 + s) A], visto que a única alteração produzida por Λ será nos valores do autovetor esquerdo, que nos dá a mercadoria-padrão.

Exemplos:

Primeiramente consideremos o sistema $Bp = \lambda Ap$ onde

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 21 & 4 & 0.5 \\ 2 & 32 & 1 \\ 1 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

Este sistema deve ter $\lambda > 1$ e $p > 0$, além de gerar um sistema-padrão, visto que:

$$C = \left[\frac{b_{ij}}{a_{ij}}\right] = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 0.5 \\ 1 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \text{ com } \quad \begin{aligned} T &= \min \left\{\frac{b_{ii}}{a_{ii}}\right\} = 4 \\ V &= \max \left\{\frac{b_{i \neq j}}{a_{i \neq j}}\right\} = 2 \end{aligned}$$

e

$$\frac{\sum b_{i1}}{\sum a_{i1}} = \frac{24}{6} = 4 > 2$$

$$\frac{\sum b_{i2}}{\sum a_{i2}} = \frac{37}{7} = 5.29 > 2$$

$$\frac{\sum b_{i3}}{\sum a_{i3}} = \frac{9.5}{4} = 2.38 > 2$$

Portanto, as condições *A*, *B* e *C* são satisfeitas e, conseqüentemente, deve existir uma solução. De fato

$$\lambda = 3.37434268 \text{ e } 2 \leq \lambda \leq 4 \text{ e } \begin{aligned} p_1 &= 0.20776795 \\ p_2 &= 0.13735972 \\ p_3 &= 0.65487234 \end{aligned}$$

Consideremos, agora, o sistema composto por:

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 1 \\ 4 & 8 & 2 \\ 10 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 2 & 10 & 2.1 \\ 9 & 0.75 & 300 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \overline{22} & \overline{10} & \overline{6} \end{matrix} \qquad\qquad \begin{matrix} \overline{20} & \overline{11.7} & \overline{303.1} \end{matrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1.125 & 1 & 1 \\ 0.5 & 1.25 & 1.05 \\ 0.9 & 0.75 & 100 \end{bmatrix} \qquad T = \max \left\{ \frac{b_{ii}}{a_{ii}} \right\} = 1.125$$

$$V = \min \left\{ \frac{b_{i \neq j}}{a_{i \neq j}} \right\} = 1.05$$

Na forma em que se encontra, tal sistema não é produtivo (para a produção de 20 unidades do produto 1, são consumidas 22 unidades do mesmo produto). Mas, existe um Λ que pode transformá-lo em produtivo.

De fato

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \Lambda B = \begin{bmatrix} 90 & 10 & 10 \\ 2 & 10 & 2.1 \\ 9 & 0.75 & 300 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \overline{101} & \overline{20.7} & \overline{312.1} \end{matrix}$$

$$\Lambda A = \begin{bmatrix} 80 & 10 & 10 \\ 8 & 8 & 2 \\ 10 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \overline{98} & \overline{19} & \overline{15} \end{matrix}$$

nesse sistema alterado

$$\frac{101}{94} = 1.0745 > 1.05$$

$$\frac{20.75}{19} = 1.0921 > 1.05$$

$$\frac{312.1}{15} = 20.8067 > 1.05$$

conseqüentemente as condições *A*, *B* e *C* são satisfeitas. Conclusão: deve existir um $\lambda > 1$ e $p > 0$ bem como um sistema-padrão para o *sistema original:*

$$\lambda = 1.09991561 \qquad p_1 = 0.003023$$

$$p_2 = 0.664579$$

$$1.05 \leq \lambda \leq 1.125 \qquad p_3 = 0.332397$$

Seria possível "melhorar" o Teorema, no sentido de diminuir as restrições impostas (A, B e C), e mesmo assim obter uma taxa de retorno positiva, um sistema de preços positivos e uma relação inversa entre a taxa de retorno e a taxa salarial?

Resposta: é possível, mas a um preço — o de não se obter todos esses resultados desejados ao mesmo tempo. Exemplo: podemos quebrar a condição *B*, e ainda encontrar alguns dos resultados desejados, como uma taxa de retorno positiva e preços positivos, mas não a relação inversa entre lucro e salários. Tomemos, por exemplo, o sistema:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \overline{2} & \overline{2} \end{matrix} \qquad\qquad \begin{matrix} \overline{5} & \overline{14} \end{matrix}$$

para este sistema podemos ver que as condições *A* e *C* são satisfeitas, mas não a condição *B*, visto que

$$T = \min \left\{ \frac{b_{ii}}{a_{ii}} \right\} \quad < \quad V = \max \left\{ \frac{b_{i \neq j}}{a_{i \neq j}} \right\}$$

o que não impede de se ter $\lambda > 1$ e $p > 0$. De fato $\lambda = 4$ e $p_1 = 2/3$
$p_2 = 1/3$

mas λ já não fica entre os limites estabelecidos e tampouco existe a mercadoria-padrão, bem como a relação inversa entre a taxa de retorno e a taxa salarial. Para se ver isto, basta completar o sistema da seguinte forma:

$$\lambda\, Ap + wl = Bp$$

onde

$$l = \begin{pmatrix} 0.01 \\ 0.99 \end{pmatrix} \qquad \text{excedente} = (3, 12) \qquad w = \sigma\,(\text{excedente})$$

seja $\sigma = 0.1$ (excedente) então $w = 0.3\, p_1 + 1.2\, p_2$ o que nos dá o seguinte sistema:

$$\lambda = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + (0.3\, p_1 + 1.2\, p_2) \begin{pmatrix} 0.01 \\ 0.99 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

cuja solução é

$\lambda = 4.8244$ e $p_1 = 0.3890$
$p_2 = 0.6110$

Se compararmos este resultado com o primeiro obtido, veremos que:

1.º resultado	2.º resultado
w = 0% do excedente	w = 10% do excedente
$\lambda = 4$	$\lambda = 4.8244$

isto é, *o salário subiu, e a taxa de lucro aumentou!*

Na realidade, pode-se demonstrar que para qualquer sistema produtivo 2x2 com $(A, B) > 0$, e para o qual

$$C = \begin{bmatrix} \frac{b_{11}}{a_{11}} & \frac{b_{12}}{a_{12}} \\ \frac{b_{21}}{a_{21}} & \frac{b_{22}}{a_{22}} \end{bmatrix} \quad \text{para o qual se observe} \quad \begin{matrix} \frac{b_{11}}{a_{11}} > \frac{b_{21}}{a_{21}} \\ \frac{b_{22}}{a_{22}} > \frac{b_{12}}{a_{12}} \end{matrix}$$

existe uma transformação T, tal que

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -\theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{onde} \quad 0 < \theta < \min \left\{ \frac{a_{11}}{a_{21}}, \frac{b_{12}}{b_{22}} \right\}$$

e um $$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{bmatrix} \quad \text{onde} \quad \Lambda_1 > 0 \text{ e } \Lambda_2 > 0$$

tal que $\Lambda T (B - (1 + s^*) A)$ é uma matriz de Schefold. Conseqüentemente para um tal sistema existe $\lambda > 1$ e $p > 0$, mas não necessariamente um sistema-padrão, como acabamos de verificar.

Observação final:

Chamamos o presente trabalho de uma extensão do Teorema de Perron-Frobenius, o que vale uma justificativa. A razão é bastante simples: para o Teorema Perron-Frobenius $(I - A)$ é uma matriz de Schefold, só que todos os elementos fora da diagonal são menores do que zero. No presente caso, $(B - A)$ não tem necessariamente todos estes elementos menores do que zero.

BIBLIOGRAFIA

GILBERT ABRAHAM-FROIS & EDMOND BERREBI, *Theory of Value, Prices and Accumulation*, Cambridge University Press, Cambridge, 1979.

B. Schefold, "Fixed Capital, Accumulation and Technical Progress" *in Essays on the Theory of Joint Production*, edited by Luigi Pasinetti, Columbia University Press, New York, 1980.

PIERO SRAFFA, *Produção de Mercadorias por meio de Mercadorias*, Zahar, Rio de Janeiro, 1977.

ABSTRACT

Starting from a rather simple theorem by Scheffold a set of sufficient conditions is found for the system $pAp = Bp$ to have a solution with $p > 1$ and $p > 0$, where A and B are nxn positive matrices. It is shown that such a system would be an extension of the system $pAp = Ip$ for which the Perron-Frobenius theorem holds.